ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

Μαθηματικά Γ Λυκείου Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής

15ο Πρόβλημα

Μια μεταλλική σφαίρα επιφάνειας ακτίνας 3m είναι ομόκεντρη με εξωτερική ελαστική σφαιρική επιφάνεια. Μεταξύ των δύο επιφανειών υπάρχει αέρας του οποίου ο όγκος αυξάνεται με ρυθμό $2m^3/min$. Να βρεθεί πόσο γρήγορα αυξάνεται το πάχος του αερίου στρώματος μεταξύ των δύο επιφανειών τη χρονική στιγμή που η τιμή του είναι 1.

Γενικότερα να αποδειχθεί ότι

α. Αν ο ρυθμός μεταβολής του όγκου μιας σφαίρας είναι ανάλογος της σφαιρικής επιφάνειας ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας είναι σταθερός.

α. Αν ο ρυθμός μεταβολής του όγκους μιας σφαίρας είναι σταθερός, ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας είναι αντιστρόφως ανάλογος της επιφάνειας .

Η ΛΥΣΗ ΘΑ ΔΟΘΕΙ ΜΕ ΤΗΝ ΑΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ ΔΕΚΑΤΟΥ ΕΚΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Λύση 14ου Προβλήματος

α. Λόγω των γραφικών παραστάσεων των βασικών συναρτήσεων, η μπλέ γραμμή αντιστοιχεί στην $f(x)=e^x$ ενώ η κόκκινη στην $g(x)=\lambda x$

β. Λόγω του σχήματος η κατακόρυφη απόσταση των δύο πλοίων ορίζεται ως $d(x)=f(x)-g(x)=e^x-\lambda x, \lambda>0$. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο R , οπότε για $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $d'(x)=f'(x)-g'(x)=e^x-\lambda, \lambda>0$.

$d'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)-g'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-\lambda=0 \Rightarrow x=\ln\lambda, \lambda>0$

$d'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)-g'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-\lambda>0 \Rightarrow x>\ln\lambda, \lambda>0$

$d'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x)-g'(x),0 \Leftrightarrow e^x-\lambda<0 \Rightarrow x<\ln\lambda, \lambda>0$

	$-\infty$ $\quad\quad$ $\ln\lambda$	$+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Η συνάρτηση για x=lnλ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή $d(\ln\lambda)=e^{\ln\lambda}-\lambda\ln\lambda=\lambda(1-\ln\lambda)$

γ. $d(x)\geq 0 \Leftrightarrow d_{\min}(x)\geq 0 \Leftrightarrow \lambda(1-\ln\lambda)\overset{\lambda>0}{\geq} 1-\ln\lambda\geq 0 \Rightarrow \lambda\leq e$. Άρα η μεγαλύτερη τιμή του λ είναι e

δ. Για λ=e η ευθεία y=ex εφάπτεται της f σε ένα σημείο με τετμημένη 1:
Πράγματι, $y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-e=e(x-1) \Rightarrow y=ex$

ε. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2022}{e^x-\lambda x}=+\infty$